- Nous avons vu au chapitre précédent que la fonction d'autocorrélation permet de quantifier la structure d'un signal.
- C'est bien, mais cette fonction d'autocorrélation peut être difficile à interpréter et, surtout, on n'a plus d'interpréation fréquentielle.
- La solution: la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation fournit cette interprétation pour les signaux stochastiques.

- On appelle densité spectrale de puissance d'un signal stationnaire la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation.

$$P_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xx}(k)\exp(-\,j2\pi fk)$$

- La densité spectrale de puissance (DSP) possède les propriétés immédiates suivantes:
  - Elle est réelle car la fonction d'autocorrélation est paire.
  - Elle est périodique de période 1 comme transformée de Fourier d'un signal numérique.

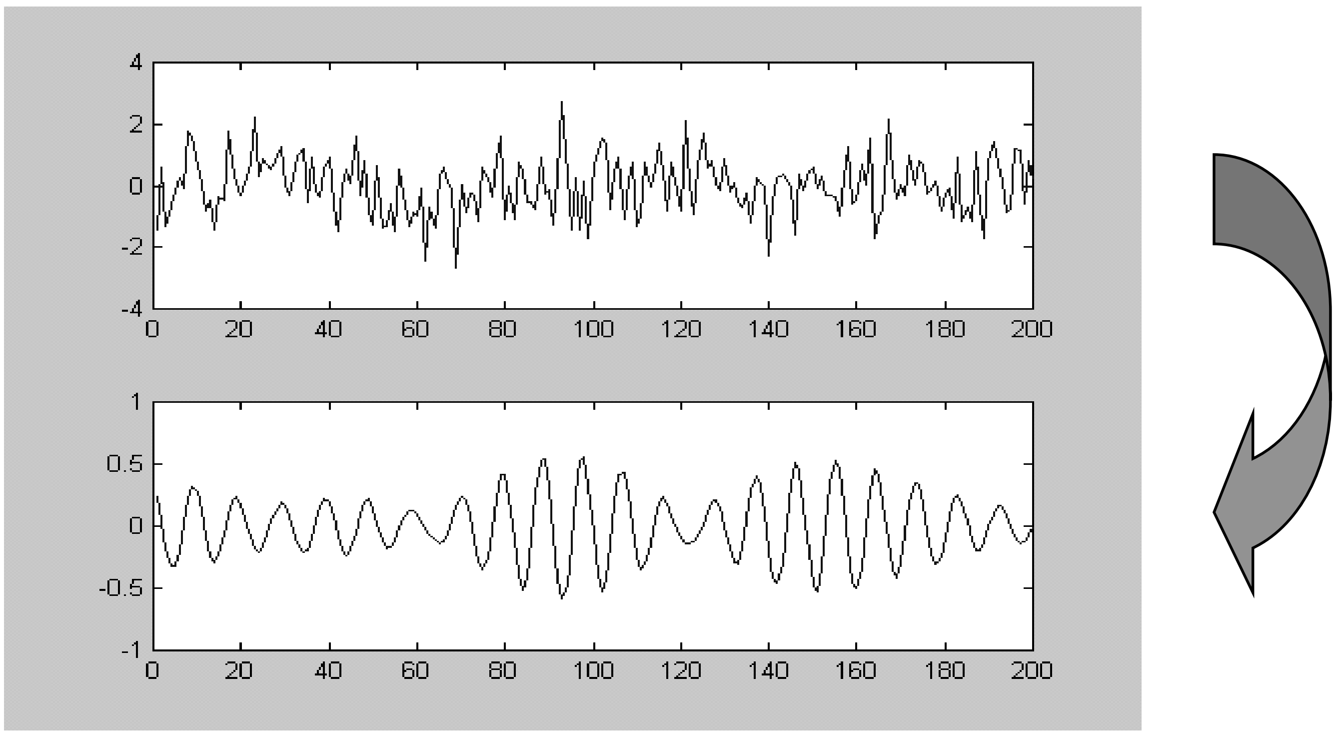
- La DSP possède d'autres propriétés qui seront admises sans démonstration:
  - Elle est positive ou nulle partout

$$P_x(f) \geq 0, \quad 0 \leq f \leq 1/2$$

  - Elle permet d'obtenir la puissance (valeur quadratique moyenne, $E[x(n)^2]$) du signal dans une bande de fréquences avec:

$$\int_{f_a}^{f_b} P_x(f)\mathrm{d}f$$

- En clair, on remplace les coefficients des composantes sinusoïdales d'un signal déterministe par la puissance moyenne du signal dans une bande de fréquences étroite.

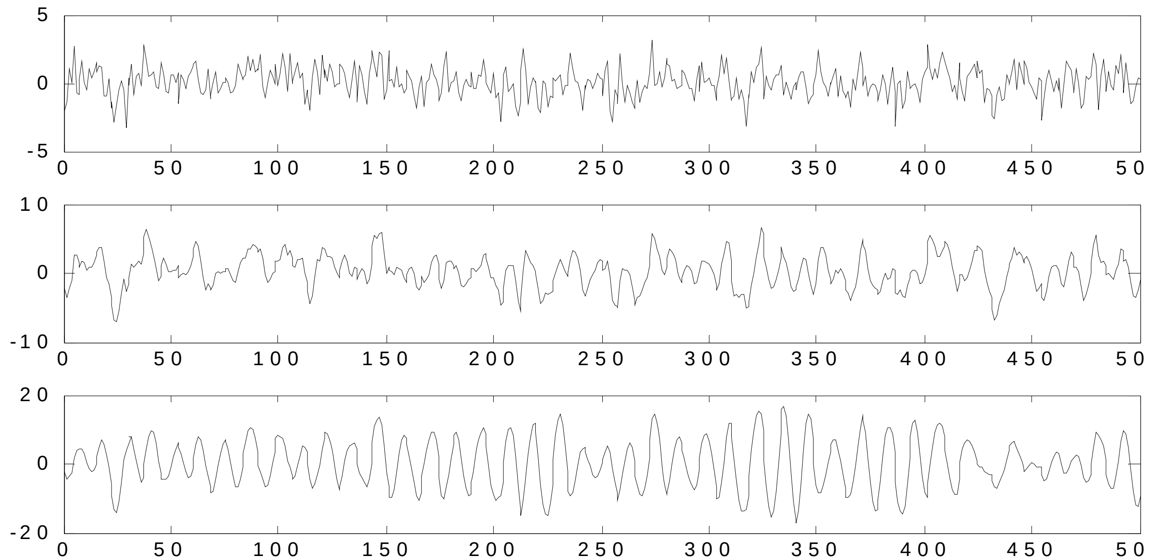


filtre passe-bande étroit ($f = 0.1$)

- Notons que si un signal *x* contient une composante sinusoïdale à une fréquence f_0, alors sa fonction d'autocorrelation contient aussi une composante sinusoïdale à f_0.
- Dans ce cas la densité spectrale de *x*, comme TF de sa fonction d'autocorrelation, présentera bien un pic pour la fréquence f_0. La DSP premet donc bien de repérer les oscillations dans un signal, et de déterminer leurs fréquences.

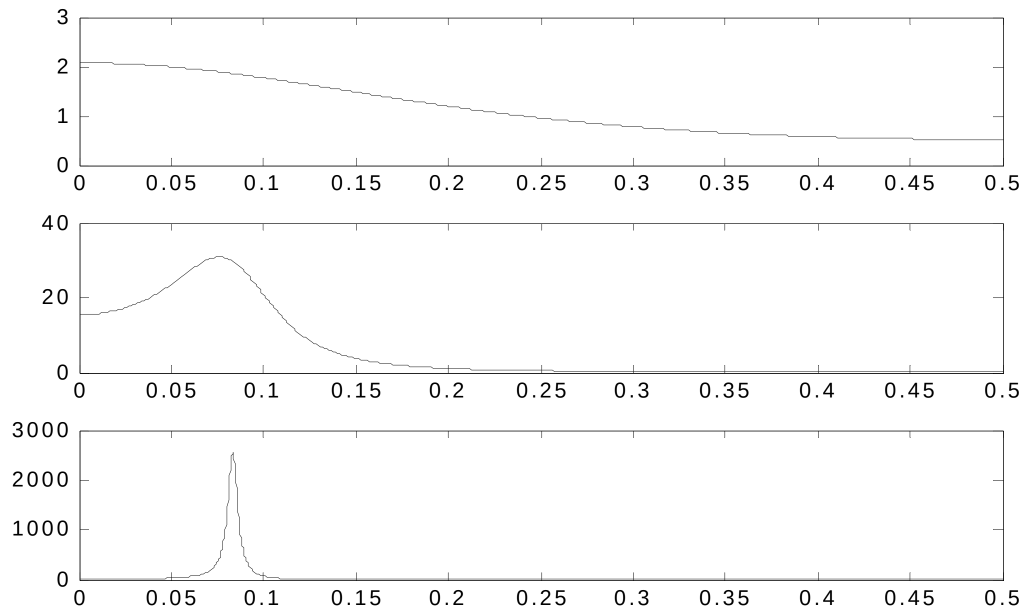
- Rappelez vous les 3 signaux présentés au chapitre précédent:

plus
de
structure



- Leurs densités spectrales de puissance sont:

plus
de
structure



- On peut noter que:

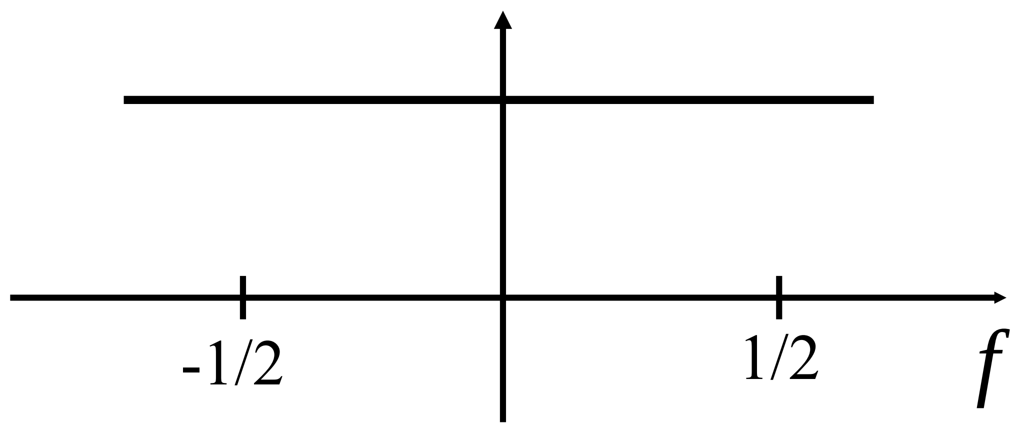
- Plus le signal est structuré, plus la densité spectrale est étroite.
- Pour les deux signaux du bas, dans lesquels on discerne une oscillation, on a un pic dans la densité spectrale.
- Pour le 3$^{\text{ème}}$ signal, plus proche d'une sinusoide, on a un pic très étroit.

- On peut démontrer que si un signal stochastique x de densité spectrale de puissance $P_x(f)$ passe dans un filtre linéaire de réponse en fréquence $G(f)$ la densité spectrale de puissance de la sortie y est donnée par:

$$P_y(f) = |G(f)|^2 \, P_x(f)$$

- La réponse en phase du filtre n'intervient donc pas. C'est la réponse en amplitude au carré (normal, ce sont des puissances) qui compte. Mais un filtre fait donc aussi son travail sur un signal stochastique.

- Comme la fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc est non nulle seulement en $k = 0$, la densité spectrale d'un bruit blanc est constante:



- D'où son nom, en référence à la lumière blanche.

- Estimateur spectral simple. Il consiste à calculer la transformée de Fourier de l'estimée biaisée de l'autocorrélation:

$$\hat{\mathrm{P}}_x(f) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \mathrm{r}_x(k) \exp(-\,\mathrm{j}2\pi f k)$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{\mathrm{P}}_x(f) = \frac{1}{N} \left| X_N(f) \right|^2 \text{ avec } X_N(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-\,\mathrm{j}2\pi f k)$$

ESTIMATION DE LA DENSITE SPECTRALE (2)

- On peut en effet prouver qu'estimer la fonction d'autocorrélation avec l'estimateur biaisé, puis prendre la TF, revient exactement au même du point de vue calcul que de calculer la TF sur les échantillons du signal, prendre le module au carré, et diviser par le nombre d'échantillons.
- On finit donc bien par calculer la transformée de Fourier du signal stochastique, mais on modifie un peu ce qu'on obtient.

- Cet estimateur est biaisé:

$$\mathrm{E}\left[\hat{\mathrm{P}}_x(f)\right] \neq \mathrm{P}_x(f)$$

- Mais surtout, pour $f = n/K$ et x un bruit blanc:

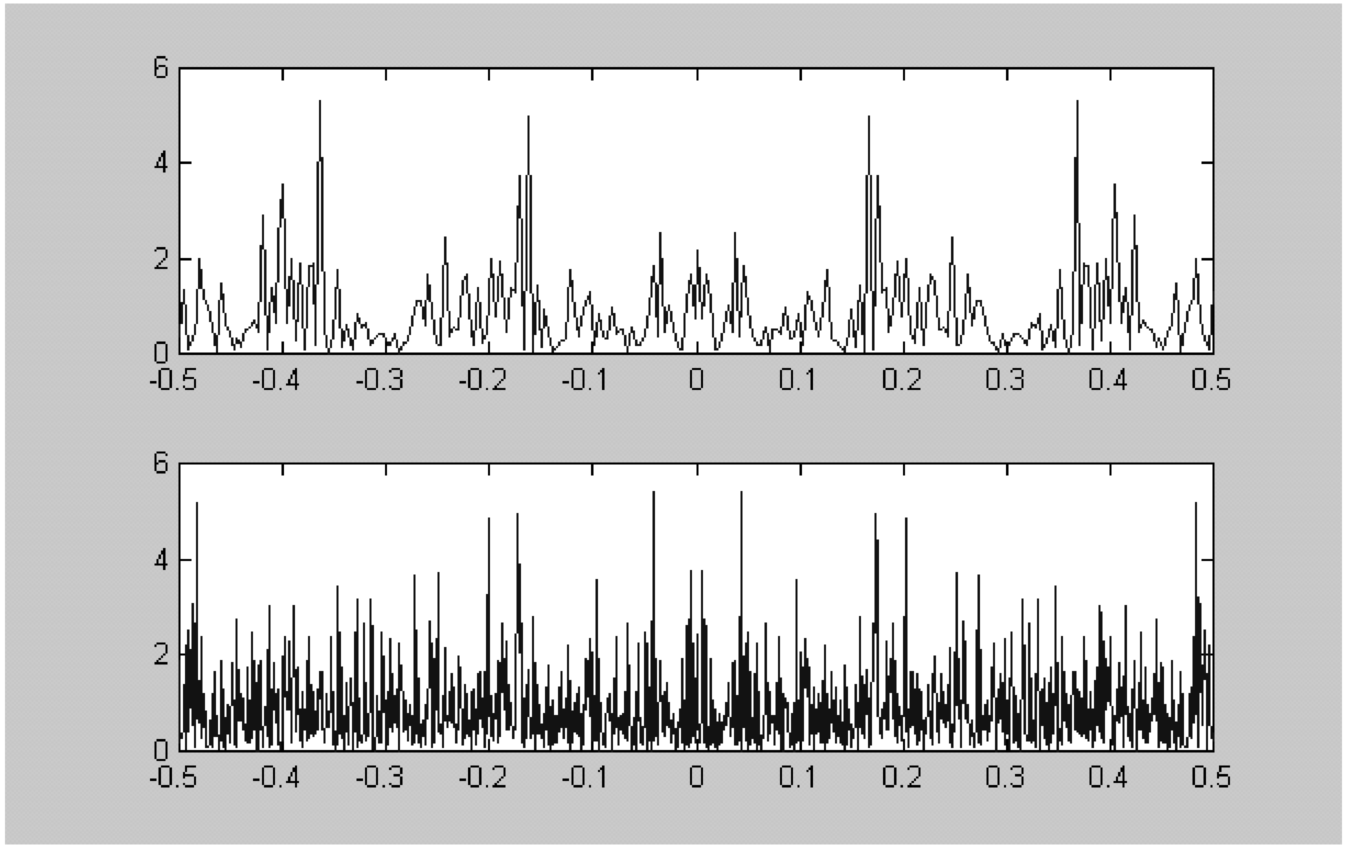
$$\mathrm{var}\left[\hat{\mathrm{P}}_x(f)\right] \approx \sigma_x^4$$

Quand, en pratique, on utilise la transformation de Fourier discrète pour estimer le spectre, la variance ne diminue pas lorsqu'on augmente K.

Estimateur simple – bruit blanc

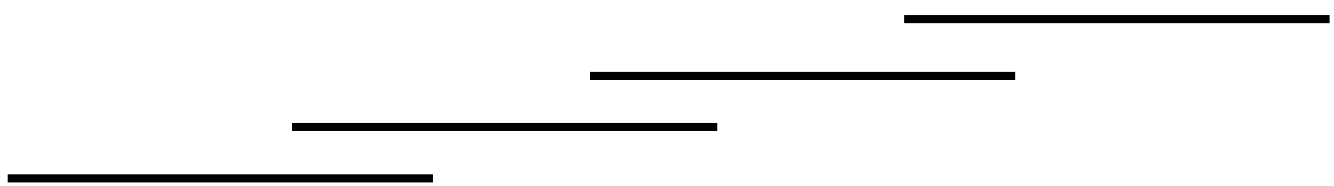
$N = 250$

$N = 1000$



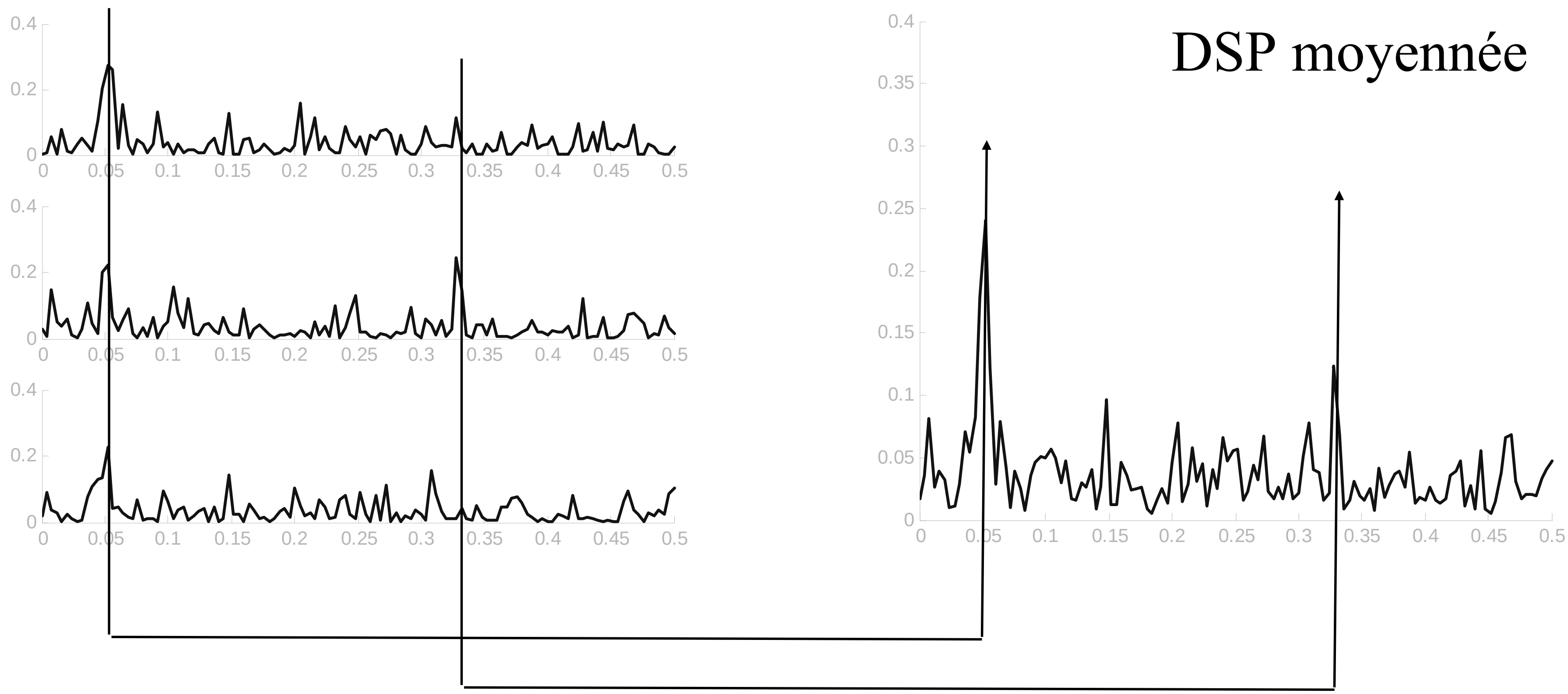
ESTIMATION DE LA DENSITE SPECTRALE (4)

- Estimateur moyenné. On segmente le signal étudié en plusieurs sections sur lesquelles on estime séparément, et on moyenne les résultats.



- Le biais est le même que celui de l'estimateur simple sur chacune des sections, mais la variance décroît en $1/N$ pour des segments de longueur constante.

- Exemple: sinusoïde $f = 0.05$ dans bruit blanc

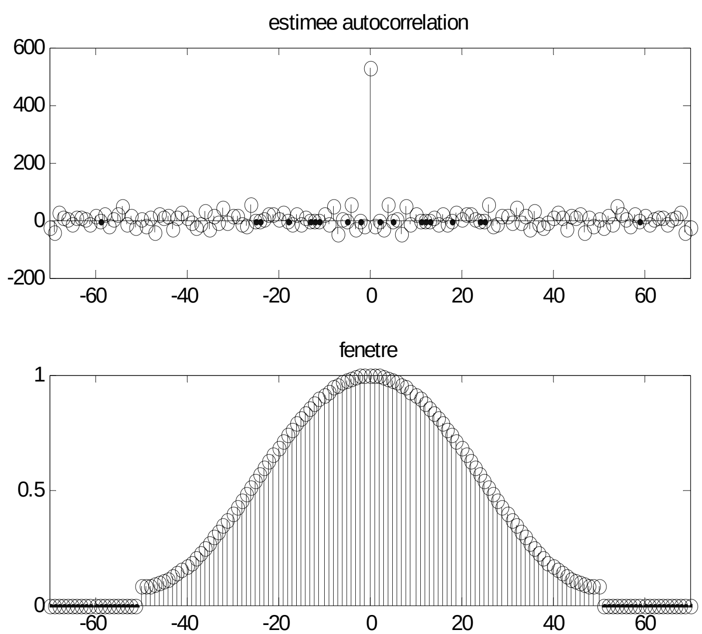


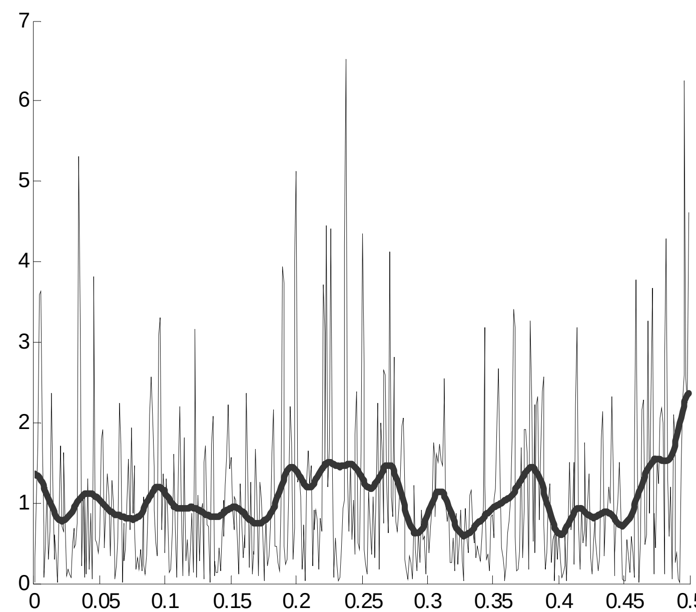
- Estimateur adouci. On filtre passe-bas l'estimée pour « lisser » les fluctuations. De cette manière, on obtient une estimée qui a une forme plus régulière
- On peut montrer que ceci correspond à multiplier l'estimée de l'autocorrélation par une fonction *w* « en bosse », appelée *fenêtre*:

$$\hat{\mathrm{P}}_X(f) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} w(k)\mathrm{r}_X(k)\exp(-\mathrm{j}2\pi fk)$$

- Exemple: estimation DSP bruit blanc

— estimation adoucie

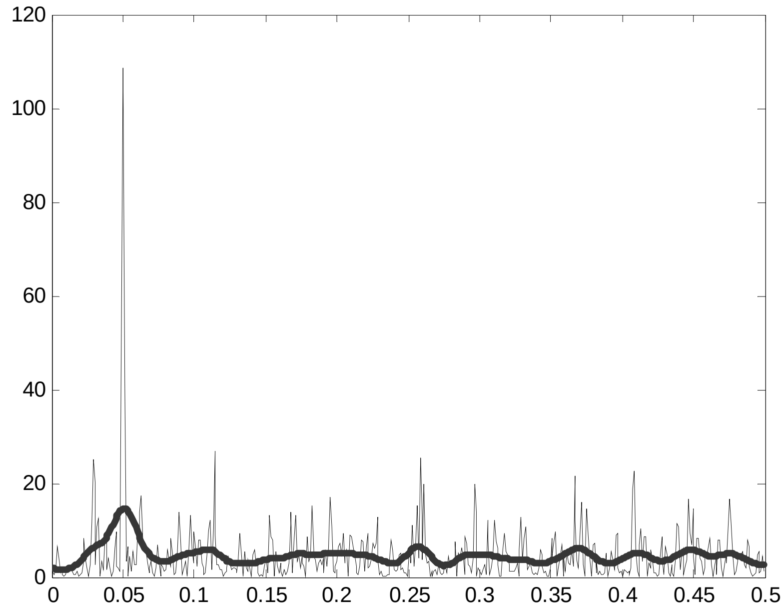




multiplication échantillon par échantillon

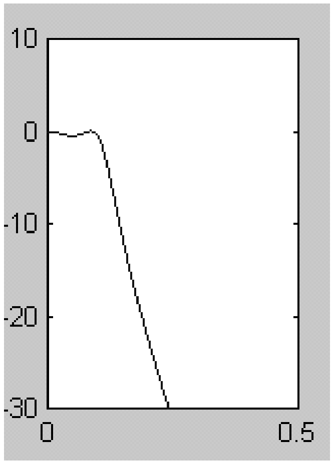
- Mais si sinusoïde + bruit blanc, le lissage a une forte tendance à gommer le pic de la sinusoïde.

estimation adoucie

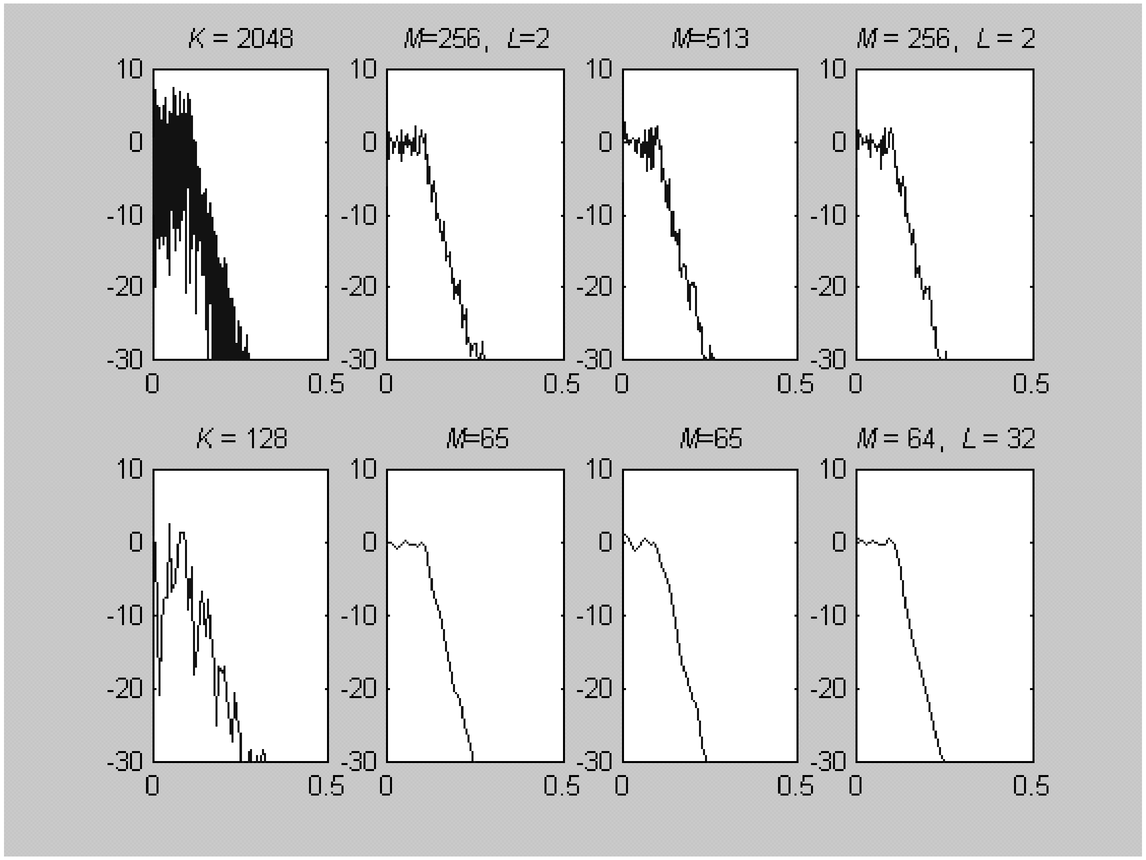


- L’estimateur moyenné permet de bien faire ressortir les pics, mais fournit une estimée pas très lisse. C’est le contraire pour l’estimateur adouci.
- Estimateur modifié. On combine les estimateurs moyenné et adouci, de façon à combiner leurs points forts (mais il arrive qu’on combine leurs points faibles!) : le signal est divisé en L sections de longueur $M = N/L$, on utilise l’estimateur adouci sur chaque section, et on moyenne les résultats.

- Illustration du biais et de la variance des estimateurs



spectre théorique

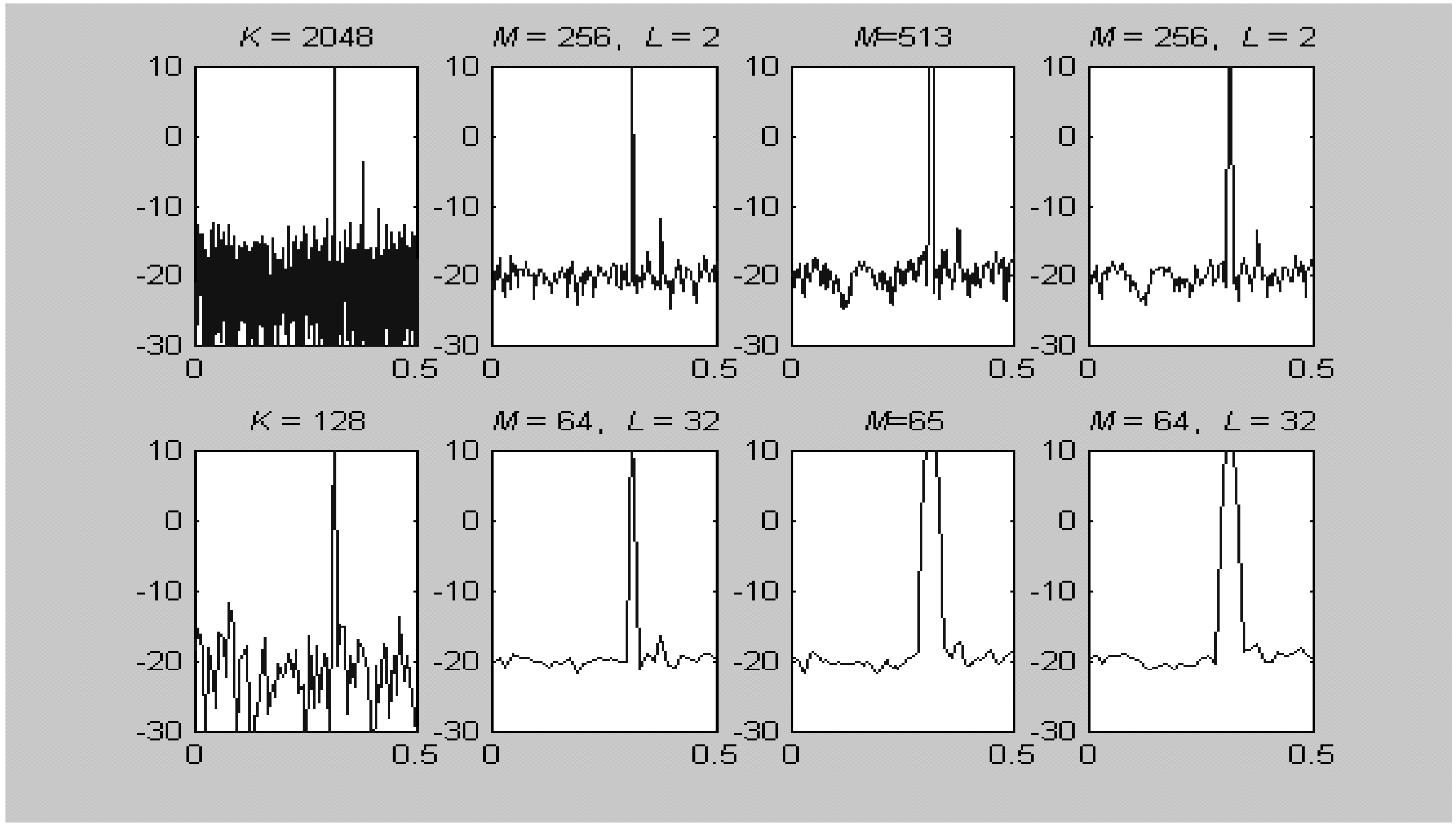


simple moyenné adouci modifié

- Illustration des résolutions dynamique et fréquentielle

bruit blanc
-20 dB

2 sinusoïdes
fréquences *n/N*
puissances 1 et
4.10^{-4}



simple moyenné adouci modifié

- Remarque importante: si on utilise une estimée de la densité pour calculer la puissance du signal dans une bande de fréquence, il ne faut pas oublier qu'on va faire une intégration numérique du type:

$$\sum P(f_i)\Delta f$$

- En conséquence, puisqu'on vas sommer des valeurs de densité obtenues aux fréquences harmoniques *n/N* séparées de $\Delta f = 1/N$, il faut multiplier la somme par ce Δf pour avoir une valeur correcte de la puissance.

- L'intégration numérique consiste effectivement à sommer les surfaces des rectangles: